Nécessité de prendre en compte des termes d'ordre G^3 pour mesurer γ à 10^{-8} près

P. Teyssandier*

*Observatoire de Paris, Dépt SYRTE/CNRS-UMR 8630,UPMC

Séminaire GPhys, Meudon, 27 Mai 2014

Introduction

Mesures de γ fondées sur la "fonction de transfert de temps (à la réception)" (FTT) donnant le temps de parcours $t_B - t_A$ d'un rayon lumineux entre $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_B$:

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_r(\mathbf{x}_A, t_B, \mathbf{x}_B) \equiv \frac{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{c} + \text{fonction de ``retard''}$$

- On sait que $|\gamma - 1| < \text{qqs } 10^{-5}$ (Bertotti *et al* 2003; Verma *et al* 2013)
- Possible violation de la RG :

$\gamma - 1 < 0$, dans l'intervalle $10^{-7} - 10^{-9}$ (Damour & Lilley 2008)

- Plusieurs projets pour mesurer $\gamma - 1$ à 10^{-8} près dans le Système solaire :
  LATOR, ASTROD, ODYSSEY, SAGAS, GAME, ...
- Problème : à quel ordre en G faut-il connaître $t_B - t_A$?
- Réponse : soit en G^2, soit en G^3! Cela dépend des paramètres utilisés.

Interêt de la fonction de transfert de temps

- Synchronisation d'horloges éloignées.

- Tracking Doppler et transferts de fréquences :

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{(g_{00} + 2g_{0i}\beta^i + g_{ij}\beta^i\beta^j)_A^{1/2}}{(g_{00} + 2g_{0i}\beta^i + g_{ij}\beta^i\beta^j)_B^{1/2}} \frac{1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B} - c\boldsymbol{\beta}_B.\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_B}\mathcal{T}_r}{1 + c\boldsymbol{\beta}_A.\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_A}\mathcal{T}_r},$$

où $\boldsymbol{\beta}_{A/B} = \left(\beta^i_{A/B}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{dx^i_{A/B}}{dt}\right)$.

- Direction d'un rayon lumineux en $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_B$ (astrométrie) :

$$\widehat{\underline{\mathbf{l}}}_A = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_A = c\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_A}\mathcal{T}_r, \qquad \widehat{\underline{\mathbf{l}}}_B = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_B = -c\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_B}\mathcal{T}_r}{1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}},$$

où $l_\alpha = g_{\alpha\beta}dx^\beta/d\lambda$ le long du rayon.

Expression de la métrique

Champ engendré par un corps central à symétrie sphérique, statique, de masse M :

$$ds^2 = \mathcal{A}(r)(dx^0)^2 - \mathcal{B}^{-1}(r)\,\delta_{ij}dx^i dx^j, \qquad m = GM/c^2$$

$$\mathcal{A}(r) = 1 - \frac{2m}{r} + 2\beta\frac{m^2}{r^2} - \frac{3}{2}\beta_3\frac{m^3}{r^3} + \beta_4\frac{m^4}{r^4} + \sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n-2}}\beta_n\frac{m^n}{r^n},$$

$$\mathcal{B}^{-1}(r) = 1 + 2\gamma\frac{m}{r} + \frac{3}{2}\epsilon\frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{2}\gamma_3\frac{m^3}{r^3} + \frac{1}{16}\gamma_4\frac{m^4}{r^4} + \sum_{n=5}^{\infty}(\gamma_n - 1)\frac{m^n}{r^n}.$$

En RG : $\quad \beta = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \cdots = \gamma = \epsilon = \gamma_3 = \gamma_4 = \cdots = 1.$

$\Longrightarrow$ Développement de $\mathcal{T}$ en puissances de G :

$$t_B - t_A = \mathcal{T}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \frac{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{c} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B).$$

Expression de $\mathcal{T}$ jusqu'à l'ordre G^3

Plusieurs méthodes conduisent au mêmes résultats pour $n = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{T}^{(1)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \frac{(1+\gamma)m}{c} \ln\left(\frac{r_A + r_B + |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{r_A + r_B - |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}\right), \qquad \text{(Shapiro 1964)}$$

$$\mathcal{T}^{(2)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \frac{m^2}{r_A r_B} \frac{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{c} \left[\kappa \frac{\arccos \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} - \frac{(1+\gamma)^2}{1+\mu}\right], \qquad \text{(Le Poncin \textit{et al} 2004)}$$

$$\mathcal{T}^{(3)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \frac{m^3}{r_A r_B}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right) \frac{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{c(1+\mu)} \left[\kappa_3 - (1+\gamma)\kappa \frac{\arccos \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{(1+\gamma)^3}{1+\mu}\right],$$

(Linet & Teyssandier 2013; Teyssandier 2014)

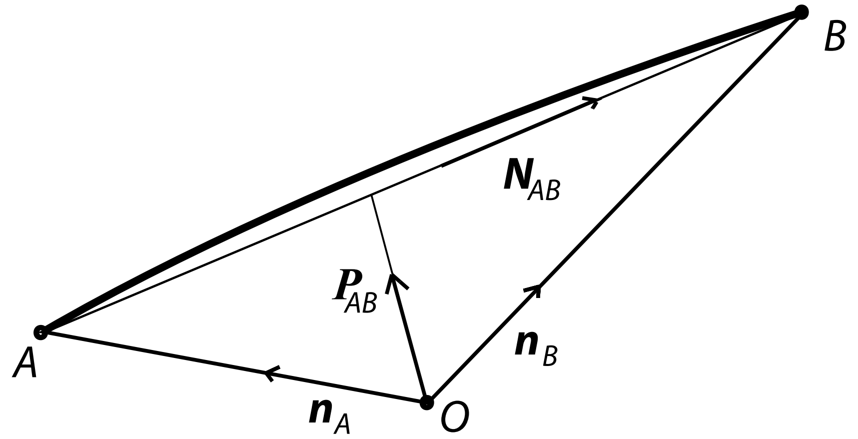
où

$$\kappa = 2(1+\gamma) - \beta + \frac{3}{4}\epsilon, \quad \kappa_3 = 2\kappa - 2\beta(1+\gamma) + \frac{3}{4}\beta_3 + \frac{1}{4}\gamma_3,$$

$$\mu = \mathbf{n}_A.\mathbf{n}_B, \qquad \mathbf{n}_A = \frac{\mathbf{x}_A}{r_A}, \qquad \mathbf{n}_B = \frac{\mathbf{x}_B}{r_B}.$$

Termes de renforcement jusqu'à l'ordre G^3

Cas où $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_B$ ont des directions presqu'opposées (*i.e.* $\mu \sim -1$) :



$\longrightarrow$ expressions asymptotiques : $\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \sim \mathcal{T}^{(n)}_{enh}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$, avec

$$\mathcal{T}^{(1)}_{enh}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \frac{(1+\gamma)m}{c} \ln\left(\frac{4 r_A r_B}{r_c^2}\right),$$

$$\mathcal{T}^{(2)}_{enh}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = -2\frac{(1+\gamma)^2 m^2}{c(r_A + r_B)} \frac{r_A r_B}{r_c^2},$$

$$\mathcal{T}^{(3)}_{enh}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = 4\frac{(1+\gamma)^3 m^3}{c(r_A + r_B)^2} \left(\frac{r_A r_B}{r_c^2}\right)^2.$$

$\Longrightarrow$ termes de renforcement (confirmation de Ashby & Bertotti 2010).

Application au système solaire

Détermination de γ dans un scénario du type CASSINI : $r_A \approx 5$ au, $r_B \approx 1$ au

$$\text{Formule de Shapiro} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\mathcal{T} \approx \frac{1}{2}\Delta\gamma\,\mathcal{T}^{(1)}$$

$$2R_\odot \leq r_c \leq 5R_\odot \quad \Longrightarrow \quad 122\ \mu\text{s} \geq \mathcal{T}^{(1)}_{enh} \geq 103\ \mu\text{s}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma - 1 \sim 10^{-8} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{T} \sim 0.5\ \text{ps}$$

Application au système solaire

Dans cette configuration (durées données en ps) :

$r_c/R_\odot$	$\lvert\mathcal{T}_S^{(1)}\rvert$	$\mathcal{T}_{J_2}^{(1)}$	$\mathcal{T}_{enh}^{(2)}$	$\mathcal{T}_{\kappa}^{(2)}$	$\mathcal{T}_{enh}^{(3)}$
1	10	2	-14974	123	22.7
2	5	0.5	-3743	61.5	1.4
5	2	0.08	-599	24.6	0.04

Conclusion: $\mathcal{T}_{enh}^{(3)}$ doit être pris en compte pour les rayons passant très près du Soleil .

On note que $\mathcal{T}_{enh}^{(3)}$ peut être plus grand que

- l'effet gravitomagnétique du premier ordre : $\left|\mathcal{T}_S^{(1)}\right| \sim \frac{2(1+\gamma)GS_\odot}{c^4 r_c}$,
- l'effet du moment quadrupolaire : $\mathcal{T}_{J_2}^{(1)} \sim \frac{(1+\gamma)m_\odot}{c} J_{2\odot} \frac{R_\odot^2}{r_c^2}$,

Discussion

Cette irruption du 3ème ordre en G est paradoxale. En effet

$$t_B - t_A = \frac{1}{c}\left[\sqrt{r_A^2 - r_P^2} + \sqrt{r_B^2 - r_P^2}\right]$$

$$+\frac{(1+\gamma)m}{c}\left[\ln\frac{(r_A + \sqrt{r_A^2 - r_P^2})(r_B + \sqrt{r_B^2 - r_P^2})}{r_P^2} + \sqrt{\frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}} + \sqrt{\frac{r_B - r_P}{r_B + r_P}}\right]$$

$$+\frac{m^2}{cr_P}\left\{2\kappa\left[\arccos\frac{r_P}{r_A} + \arccos\frac{r_P}{r_B}\right] - \frac{(1+\gamma)^2}{4}\left[5\sqrt{\frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}} + 5\sqrt{\frac{r_B - r_P}{r_B + r_P}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}\right)^{3/2} - \left(\frac{r_B - r_P}{r_B + r_P}\right)^{3/2}\right]\right\} + O\left(\frac{m^3}{cr_P^2}\right).$$

Supposons $r_A = r_B = 1$ au et $r_P = R_\odot$ (terme d'ordre $0 = 499$ s) :

Terme d'ordre 1 : 139 μs

Terme d'ordre 2 : 162 ps $\Longrightarrow$ Aucun effect de renforcement

Terme d'ordre 3 < 1 fs $\Longrightarrow$ Négligeable; aucun effect de renforcement

Discussion

Comment peut-on surmonter cette contradiction apparente?

On peut montrer que r_P et r_c sont liés par

$$r_P = r_c \Bigg\{ 1 - (1+\gamma - q_1)\frac{m}{r_c} - \frac{1}{2}\Big[2\kappa - (1+\gamma)^2 - 2q_2\Big]\frac{m^2}{r_c^2} - \frac{1}{2}\Big[2\kappa_3 - 2\kappa q_1 + (1+\gamma)^2 q_1 - 2q_3\Big]\frac{m^3}{r_c^3} + \cdots \Bigg\},$$

où les q_n sont définis par

$$q_n = -c\left(\frac{r_c}{m}\right)^n \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r_c}\frac{\partial \mathcal{T}^{(n)}(r_A, r_B, \mu)}{\partial \mu}.$$

Substituant ce développement dans l'expression of $t_B - t_A$ ci-dessus, on obtient

$$t_B - t_A = \frac{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|}{c} + \mathcal{T}^{(1)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) + \mathcal{T}^{(2)}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) + \mathcal{T}^{(3)}_{enh}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$$

$$+ \text{ certains des termes en } G^3, \text{ tous négligeables.}$$

Discussion

Si $\mu \sim -1$

$$\begin{aligned} q_1 &\sim 2(1+\gamma)\frac{\sqrt{r_A r_B}}{r_A + r_B}\frac{\sqrt{r_A r_B}}{r_c}, \\ q_2 &\sim -q_1^2, \\ q_3 &\sim 2q_1^3. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $r_A = r_B = 1$ au, $r_c \approx R_\odot$ $\Longrightarrow$ $q_1 \approx 430$ $\Longrightarrow$ $r_P - r_c \approx 630$ km

$\longrightarrow$ $r_A = 50$ au, $r_B = 1$ au, $r_c \approx R_\odot$ $\Longrightarrow$ $q_1 \approx 843$ $\Longrightarrow$ $r_P - r_c \approx 1240$ km

$\Longrightarrow$ r_P et r_c sont significativement différents en quasi-conjonction.

A comparer avec $(1+\gamma)m_\odot \approx 3$ km.

Conclusion

Pour déterminer $\gamma - 1$ à 10^{-8} près :

- On peut se contenter d'aller en G^2 si on utilise $t_B - t_A = \mathcal{T}(r_A, r_B, r_P)$;
- Par contre, il faut développer $\mathcal{T}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ jusqu'à l'ordre G^3.

La même conclusion vaut pour la mesure de la déviation gravitationnelle de la lumière au voisinage du Soleil avec la précision $\sim 1\mu$as (cf. Hees *et al* 2013 et Teyssandier 2013).

Problème analogue pour Gaia dans le cas d'un rayon rasant Jupiter (Klioner & Zschocke 2010 et Teyssandier 2012).

References

- Ashby N & Bertotti B 2010 *Class. Quantum Grav.* **27** 145013
- Bertotti B, Iess L & Tortora P 2003 *Nature* **425** 374
- Damour T & Lilley M 2008 "String Theory, Gravity and Experiment", *Les Houches Summer School in Theoretical Physics* Session 87; arXiv:0802.4169v1
- Hees A, Bertone S & Le Poncin-Lafitte C 2013 *Journées 2013* (poster)
- Hees A, Bertone S & Le Poncin-Lafitte C 2014 arXiv:1401.7622
- John R W 1975 *Exp. Tech. Phys.* **23** 127
- Klioner S A & Zschocke S 2010 *Class. Quantum Grav.* **27** 075015
- Le Poncin-Lafitte C, Linet B & Teyssandier P 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 4463
- Linet B & Teyssandier P 2002 *Phys. Rev.* D **66** 024045
- Linet B & Teyssandier P 2013 *Class. Quantum Grav.* **30** 175008
- Minazzoli O & Chauvineau B 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 085010
- Shapiro I I 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 789
- Teyssandier P& C. Le Poncin-Lafitte 2008 *Class. Quantum Grav.* **25** 145020
- Teyssandier P 2012 *Class. Quantum Grav.* **29** 245010
- Teyssandier P 2013 arXiv:1312.3510
- Teyssandier P 2014, à paraître dans les Brumberg Festschrifts, ed. par S Kopeikin
- Velma A K, Fienga A, Laskar J, Manche H & Gastineau M 2013 arXiv:1306.5569v2